

Generalizando patrones figurales con estudiantes de 8 y 9 años: una interpretación de los medios semióticos de objetivación movilizados *

Generalizing figural patterns with students of 8 and 9 years old: an interpretation of the semiotic means of objectification mobilized

Adriana Lasprilla Herrera

Docente de matemáticas
Colegio Santa Ana Fontibón
Bogotá, Colombia
E-mail: arranala@gmail.com

Francisco Javier Camelo Bustos

Docente de matemáticas
Especialización en Educación Matemática
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá, Colombia
E-mail: fjcamelob@udistrital.edu.co

Received: 15 - Feb - 12 / Accepted: 15 - Jun - 12

Resumen

Se da cuenta de los medios semióticos de objetivación que emergieron, en niños y niñas de 8 y 9 años de edad de una institución educativa de Bogotá D. C. (Colombia) en una clase de matemáticas, al abordar una tarea de generalización de patrones figurales, como un proceso de producción de significados. El análisis se realizó teniendo en cuenta la teoría cultural de la objetivación (Radford, 2008), particularmente los estratos de generalidad y los medios semióticos de objetivación desarrollados por los estudiantes. Se encontró que los estudiantes emplearon los medios semióticos identificados por Radford (2010) y se ubicaron en un estrato de generalidad factual.

Palabras clave: generalización, teoría de la objetivación, gestos, medios semióticos.

Abstract:

This paper reports the semiotic objectification means that arose among 7 and 8 year-old children from a school in Bogota D.C., Colombia in a math class, when they addressed a generalization task of figural patterns as a process of meaning production. The analysis was conducted according to the cultural theory of objectification (Radford, 2008), particularly the layers of generality and the semiotic means of objectification developed by the student it. Found that students in this study identified the semiotic means employed by Radford (2010) and were located in a layer of factual generality.

Key words: generalization, objectification theory, gestures, semiotic means.

Résumé

Ce travail rend compte des moyens sémiotiques d'objectivation qui ont émergé chez des enfants de 8 et 9 ans, étudiants d'un établissement éducatif de Bogota, D.C. (Colombie) dans un cours de mathématiques, en abordant une tâche de généralisation de patrons figuraux comme



un processus de production de significations. L'analyse a été effectuée tenant compte de la théorie culturelle de l'objectivation (Radford, 2008), notamment les strates de généralité et les moyens sémiotiques d'objectivation développés par les étudiants. On a trouvé que les étudiants ont employé les moyens sémiotiques de Radford (2010) et se sont placés dans une strate de généralité factuelle.

Mots clés: généralisation, théorie de l'objectivation, gestes, moyens sémiotiques.

Resumo

Ter conhecimento dos meios semióticos de objetivação que emergiram, em meninos e meninas de 8 e 9 anos de idade de uma instituição educativa de Bogotá D. C. (Colômbia) em uma classe de matemática, ao abordar uma tarefa de generalização de padrões figurais, como um processo de produção de significados. A análise foi realizada tendo em conta a teoria cultural da objetivação (Radford, 2008), particularmente os estratos de generalidade e os meios semióticos de objetivação desenvolvidos pelos estudantes. Encontrou-se que os estudantes empregaram os meios semióticos identificados por Radford (2010) e situaram-se em um estrato de generalidade factual.

Palavras chave: generalização, teoria da pesquisa, gestos, meios semióticos.

* Este artículo reporta algunos de los resultados de la investigación: Medios semióticos de objetivación que emergen de estudiantes de tercero de básica primaria en torno a una tarea de generalización de patrones figurales. Realizada para la obtención del título de la Especialización de Educación Matemática de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, entre enero de 2010 y enero de 2011.



Introducción

Sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar han desarrollado diversas investigaciones a nivel nacional e internacional (Socas, Camacho, Palarea y Hernández, 1996; Azarquiel, 1993; Mason, Graham, Pimm y Gowar, 1989; Grupo Pretexto, 1999; Fernández, 1997; Segura, 2001; Radford, 2008; Lasprilla, 2012 y Vergel, 2010) en las que la comprensión y construcción de algunos conceptos y procedimientos del álgebra (interpretación de la letra, procesos de generalización y simbolización, planteamiento de sistemas de ecuaciones, y desarrollo de competencias algebraicas), son objeto de estudio y, en donde se ha evidenciado, que el tratamiento escolar de éstos procesos genera dificultades, que pueden estar relacionadas con el profesor y con el estudiante.

De las investigaciones realizadas por Radford (2008) puede inferirse que uno de los intereses actuales en la comunidad de investigadores a nivel internacional, es diseñar y aplicar actividades para la clase de matemáticas sobre generalización de patrones, que puedan ofrecer a los estudiantes la oportunidad de reflejar su pensamiento algebraico. En particular, en la perspectiva semiótica cultural, esto es considerado un problema didáctico, pues posibilita el entender formas de aparición de dicho pensamiento. Por tal razón en este documento se propone identificar los medios semióticos que emergen y utilizan los estudiantes específicamente en torno a una tarea sobre generalización de patrones figurales.

En este sentido, el propósito de este trabajo¹ se enmarca en una perspectiva teórica de orientación semiótica, derivada de corrientes contemporáneas socioculturales de aprendizaje (la teoría cultural de la objetivación). Dicha

¹ Éste documento muestra algunos de los resultados encontrados por Lasprilla (2012) en el trabajo de grado que desarrolló para optar el título de Especialista en Educación Matemática en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

perspectiva teórica centra su atención en el proceso de aprendizaje, bajo el ángulo de la interacción social y la movilización tanto de signos como de artefactos que realizan los estudiantes (Radford, 2006).

Para dar cuenta de ello, se ha estructurado este documento de la siguiente manera: en la primera parte se presenta la problemática sobre la cual se trabajó. En la segunda parte, se presentan algunos elementos, en donde se da una breve descripción de consideraciones teóricas que se tomaron como antecedentes y sustento para el desarrollo del escrito. La tercera parte, presenta los aspectos metodológicos y, a continuación, el análisis de las producciones de los estudiantes. Para finalmente realizar una discusión en torno a las conclusiones.

Planteamiento del problema:

Es ampliamente reconocido que en la labor docente, es de vital importancia cuestionarse sobre las implicaciones que tienen las actuaciones del profesor en el desarrollo del pensamiento de los estudiantes, pues cada vez que se propone el estudio de una determinada temática, entran en juego, entre otras, las percepciones del docente, el tipo de actividades que se propone y la manera como los docentes interpretan la enseñanza y el aprendizaje; lo que determinará la imagen que se hagan los estudiantes de los distintos temas trabajados.

Por otro lado, debe considerarse que distintas investigaciones realizadas en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra, han identificado que algunas de las dificultades que muestran los estudiantes son originadas por la manera en que el docente desarrolla los temas. Por ejemplo: el Grupo Azarquiel (1993) afirma que en la enseñanza tradicional del álgebra se da prioridad a los procesos algorítmicos más que a desarrollar procesos de pensamiento que



permitan la construcción de un pensamiento algebraico. en relación a esto Mason et al. (1989) comentan que en el álgebra:

“[...] es indiscutible que la construcción del pensamiento algebraico tiene lugar a lo largo de un proceso paralelo y continuo dentro del trabajo aritmético y geométrico que se inicia en los primeros años del ciclo básico” (pág. viii, 1999).

De este modo es importante iniciar el desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros cursos de educación, Button y Rojano (2000) afirman que los tiempos didácticos para el aprendizaje del álgebra son prolongados y por ello es conveniente iniciar en edades tempranas, aprovechando las fuentes de significados que están presentes en los contenidos matemáticos de la educación primaria.

En esta misma línea, Fernández (1997) y Espinosa (2001) atribuyen los errores cometidos por los estudiantes en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra a la enseñanza tradicional, dado que ella frecuentemente se enfoca en los resultados de los procesos de cálculo más que en los aspectos relacionales y estructurales, oponiéndose así al desarrollo del pensamiento algebraico.

De este modo, es evidente que el desarrollo de pensamiento algebraico en los estudiantes debe contemplar aspectos relacionados, de manera fundamental con los registros semióticos, dado que, es posible que la comprensión de éstos permita que los estudiantes puedan abordar situaciones o problemas algebraicos. Es así que surge la necesidad de indagar frente a los medios semióticos, en particular, en detectarlos e identificarlos para intentar analizar su evolución en el desarrollo de pensamiento algebraico.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, es de resaltar, que muchas de las dificultades al trabajar aspectos asociados al álgebra escolar, pueden encontrar su causa en

la gestión de aula que se emplea para abordarla, ya que algunos profesores dejan la impresión en los estudiantes, de que el trabajo algebraico es netamente algorítmico, y no advierten suficientemente que hay una construcción semiótica que le da sentido, como el simple hecho de realizar un dibujo o gráfico para abordar una situación. Es por ello, que es importante fijar la mirada en los medios semióticos de objetivación, pues son los que le darán sentido al objeto matemático.

Es así que, con el interés de abordar los procesos seguidos por estudiantes de tercer grado de educación básica² en relación a tareas de desarrollo de pensamiento algebraico, se propuso este trabajo, modificando una actividad de generalización de patrones figurales, propuesta por Radford (2010).

Teoría cultural de la objetivación:

Como ya se ha mencionado, la teoría bajo la cual se realiza este trabajo se enmarca dentro de las investigaciones de tipo sociocultural, planteadas inicialmente por Vygotsky, donde se establece una manera de teorizar los procesos de aprendizaje de las matemáticas, visualizando dos aspectos principales: la naturaleza histórica del saber movilizado por la escuela y la manera en que ese saber es retomado por los estudiantes en el curso de procesos sociales de producción de significados Radford (2006).

Dentro del estudio de la producción de significados mediante un proceso social, se enmarca la teoría cultural de la objetivación, en la cual se definen varios conceptos fundamentales dentro del estudio de los procesos de enseñanza aprendizaje. Uno de estos es el conocimiento de los objetos matemáticos, el cual es interpretado

² En Colombia, el sistema educativo se divide en Educación Preescolar, Educación Básica y Educación Media Vocacional. Se espera que los estudiantes de tercer grado de educación básica tengan entre 8 y 9 años.



como el resultado de una construcción o reconstrucción más o menos viable que resulta de las acciones de adaptación ejercidas por el estudiante frente a un problema o situación (Miranda, Radford y Guzmán, 2010). Para la teoría de la objetivación, el saber no es agotado por la situación que ha podido darle origen, pues la concepción de la misma situación ha sido posible únicamente en cuanto parte de una manera de plantear y buscar soluciones a dicho problema. El aprendizaje es visto como una “adquisición comunitaria de formas de reflexión del mundo guiadas por modos epistémico culturales históricamente formados” (Radford, 2006, p. 105).

La progresiva dotación de sentido en torno al objeto cultural que subyace en el aprendizaje es vista como un proceso social denominado objetivación, el cual se da a través del uso de diversos medios semióticos, que permiten la objetivación del objeto y a la vez los procesos de producción de significados.

Otro concepto importante dentro de la teoría es el pensamiento, el cual está íntimamente relacionado con los signos, como dice Vygotski (citado por Miranda, Radford y Guzmán, 2007), nuestro funcionamiento cognitivo está íntimamente ligado y afectado por el uso de los signos. Pero es fundamental resaltar que los signos son interpretados desde lo escrito, oral, términos lingüísticos, símbolos, gestos y movimientos tal como establece Radford (2008, citando a Azarello, 2006). Es así que dentro de la teoría, el signo no se refiere únicamente al papel de representante y representado como lo establecen algunas teorías semióticas, sino que es un concepto mucho más amplio.

Por otra parte, dentro de esta teoría, la generalización algebraica de patrones puede ser entendida como observar algo que va más allá de lo que realmente se ve (Radford, 2008). Siendo

más específicos, la generalización algebraica de un modelo, se basa en el darse cuenta de una comunalidad³ local, que luego se generaliza a todos los términos de la sucesión y que sirve como una orden para construir expresiones de los elementos de la secuencia que siguen estando fuera del campo perceptivo. En otras palabras, es establecer lo que es particular dentro una construcción y estar en la capacidad de verlo aún cuando perceptivamente no es evidente. En este contexto, la idea de objetivación se entiende como el proceso social de toma de conciencia progresiva de algo frente a nosotros, una figura, una forma, algo cuya generalidad notamos gradualmente (Radford, 2006). En este orden de ideas, el aprendizaje no consiste en construir o reconstruir un conocimiento, se trata de dotar de sentido a los objetos conceptuales que encuentra el alumno en su cultura.

Para Radford (2006), el objeto no es un objeto monolítico u homogéneo, es un objeto compuesto de laderas de generalidad, en consecuencia, el aprendizaje consistiría en aprender a notar o percibir esas laderas de generalidad y estas son notadas de manera progresiva por el alumno (p.116).

En relación al dominio de la sintaxis algebraica, Radford señala que el enfoque teórico de la semiótica cultural centra su atención en el discurso y los signos puestos en juego cuando los alumnos se refieren a objetos matemáticos, ya que desde el marco teórico sociocultural, se presta atención al proceso discursivo y semiótico a través del cual los estudiantes intentan dar sentido a los gráficos.

Los procesos interpretativos de los estudiantes se investigan a través del constructo teórico de la objetivación del conocimiento y la configuración de los signos matemáticos, los gestos y las palabras que recurren a fin de

³ Comunalidad hace referencia a toda la información que puede ser importante para percibir un patrón.



alcanzar mayores niveles de conceptualización Vergel (2010).

Metodología aplicada

El trabajo se realizó bajo un paradigma de investigación cualitativa, en donde hubo una preocupación centrada en indagar los hechos o fenómenos educativos en su “realidad natural”. Por lo que se hizo necesario aceptar que la investigación cualitativa plantea una concepción holística, esto es, posibilita comprender en profundidad y desde la totalidad contextual en que se producen las prácticas, el significado de los hechos educativos, tal como lo plantean Bravin y Pievi (2008).

La toma de datos se llevó a cabo con estudiantes de grado tercero (8-9 años), durante el desarrollo de tres sesiones de clase (durante una semana, dos de una hora y una de dos horas). La recolección de la información se realizó en cuatro momentos como se describe a continuación:

Momento 1: Se inició con la ubicación de la problemática, en relación al interés de dar una mirada a los medios semióticos de objetivación, encontrando referentes teóricos que fueron considerados en el marco teórico, posteriormente se realizó la planeación de la intervención, para ello fué necesario revisar algunas de las actividades que ha empleado Radford (2010 y 2008) en sus investigaciones y de ellas determinar la tarea y los ajustes necesarios para el desarrollo del trabajo.

Momento 2: En la implementación de la tarea, se determinó la manera en que se realizarían las grabaciones y se consideró necesario recoger en cada sesión las hojas de trabajo desarrollado por los estudiantes, como también se tuvieron en cuenta las notas teóricas y personales tomadas por la profesora.

Momento 3: Luego de aplicada la tarea se procedió a realizar la transcripción de algunos de los discurso de los estudiantes, teniendo presente que fueran los que permitieran mayor evidencia de medios semióticos, durante la solución de la actividad y revisión de las elaboraciones escritas.

Momento 4: finalmente se realizó el análisis de videos (identificación de medios semióticos de objetivación). El análisis de los datos se realizó bajo una concepción multimodal del pensamiento humano, en la que es importante fijar la atención en los diferentes sistemas semióticos (elementos perceptivos, quinesiológicos, gestuales, simbólicos y verbales) utilizados y emergentes durante la actividad (lenguaje escrito, lenguaje hablado, gestos, acciones, etc.) y los distintos estratos o laderas de generalidad presentes.

Se realizó una búsqueda, en términos de la tarea que fuera pertinente para el trabajo, así que se tomo una actividad empleada por Radford (2008) en sus investigaciones y se adaptó a los intereses. Luego se aplicó, teniendo en cuenta que se realizara la filmación de cada una de las sesiones, con los datos recolectados, se desarrolló el análisis teniendo presente los estratos de generalidad propuestos por Radford, con ellos se pudo determinar además de los medios semióticos empleados, algunos indicios del proceso de objetivación seguido por los niños.

Para el desarrollo de este trabajo se seleccionó la primera actividad empleada por Radford (2008) con niños de octavo grado.

Parte 1:

En la actividad se pidió continuar con la figura número 5 ya que se proporcionaba solo las figuras uno, dos y tres, luego se propuso calcular el número de círculos en las figuras 25 y 100 y, finalmente, establecer una fórmula para hallar la cantidad de círculos en la figura n.

Los estudiantes a los que se aplicó la actividad encontraron que las cantidades de las posiciones



pedidas se podían hallar sumando la cantidad superior y la inferior mas uno, inicialmente lo plantearon de manera oral y posteriormente utilizando letras.

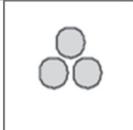
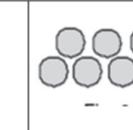
La modificación realizada a la actividad, consistió en agregar las preguntas 2, 3 y 4,

pretendiendo con ellos esbozar los momentos en que se desarrolló la clase, y de permitirle a los estudiantes que fueran aclarando la manera como estaban estableciendo el patrón, en la medida que debían escribir los procedimientos seguidos.

Generalización de patrones
Parte 1

Nombre: _____

1. Dibuja las figuras correspondientes a las posiciones 4 y 5.

				
Fig. 1	Fig. 2	Fig. 3	Fig. 4	Fig. 5

2. Establece la cantidad de bolas que tendrá la sexta y la séptima figura y escribe el procedimiento que seguiste para hallar estas cantidades.

3. En grupos socializa tus respuestas y establece la cantidad de bolas en las figuras ocho, nueve y diez y escriban el procedimiento que utilizaron para encontrar estas cantidades.

4. Socialización de respuestas en todo el curso.

Parte 2:

De acuerdo a las estrategias establecidas en la anterior sesión, responde:

1. Encuentra el número de bolas que tienen las figuras 25, 50 y 100. Escribe el procedimiento que seguiste para hallar estas cantidades.
2. Realiza una carta para enviarla a un compañero que no pudo asistir a las clases pues debe enterarse del trabajo que realizaron. En la carta se debe explicar todas las actividades que se hicieron y la manera como se procedió para encontrar la solución a las preguntas planteadas inicialmente, además de lo más importante que se haya discutido.
3. Socialización de respuestas en todo el curso.

La segunda parte de la actividad surgió por la necesidad de ver la cantidad de círculos en posiciones no cercanas a la que habían encontrado en la parte uno de la actividad y de nuevo se establecían los momentos en que se desarrollaron la sesiones y los procedimientos que siguieron.

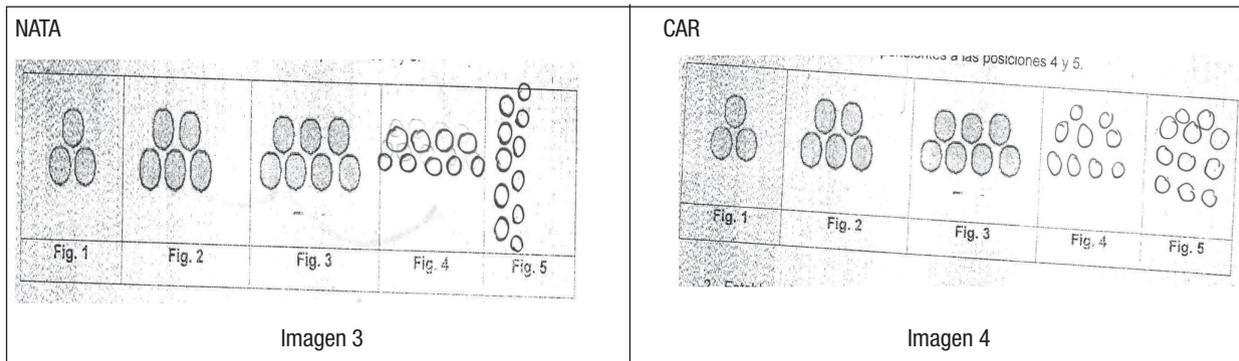
El desarrollar la actividad en dos partes, fue necesario, por la edad de los estudiantes (8 y 9 años), ya que era pertinente darles tiempos para abordar cada una de las preguntas, de manera

que pudieran tener una visión más detallada de la generalidad allí relacionada.

Análisis de la implementación:

El primer medio semiótico emergente fue el realizar los dibujos de las posiciones cuatro y cinco, en este se dieron dos posibilidades, en una los estudiantes conservaron la forma de las anteriores figuras y otros no, como puede en la imagen 3 y 4:





Nata consideró necesario conservar la distribución geométrica de la figura aunque por cuestiones de espacio la figura cinco la hizo en sentido vertical, mientras que el Car, al parecer, no le dio importancia a la distribución de los círculos, para él era necesario considerar las cantidades de cada posición, este aspecto fue importante posteriormente, ya que el grupo que

prestó atención a la distribución pudo establecer una generalización más eficiente en relación a quienes no tuvieron en cuenta este aspecto.

Aunque es importante considerar que en un primer momento los estudiantes realizaron gestos que evidenciaban que no comprendían con claridad la situación⁴. Como muestran las imágenes 5 y 6.



Imagen 5



Imagen 6

La interacción en los pequeños grupos permitió comprender mucho mejor la situación y llegar a acuerdos, como sucedió con Fel y Nat, al discutir cuántos puntos habían en las posiciones seis y siete, como pude leerse en la siguiente transcripción de un fragmento del video de la primera sesión:

Nat: están mal, en la 6 hay trece [señalando lo que escribió Felipe].

Fel: [borra lo que había realizado].

Nat: ... y en el otro son catorce,... tú tienes que escribir en total hay.... [Dictándole lo que ella escribió] veintiséis,... ahora hay que hacer el ocho el nueve y el diez.

Fel: veinte, diez y ocho... ¿no es?, ¿no es el doble?

Nat: es lo que creamos, [realizando un gesto que muestra no entender lo que el compañero le decía].

⁴ La filmación y las fotos aquí mostradas fueron autorizadas para los fines de éste trabajo por los padres de los niños.





Imagen 7



Imagen 8

Mientras que en el grupo de lui, Feli y Nata, establecieron que para hallar las cantidades pedidas era necesario sumar dos a la cantidad de la posición anterior, y dieron las cantidades como razón, comparando la cantidad de bolas y la posición, por ejemplo para la posición ocho escribieron: 17/8, en la nueve: 19/9 y en la 10 21/10.

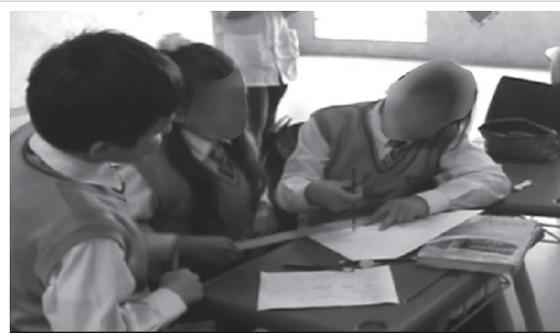


Imagen 10

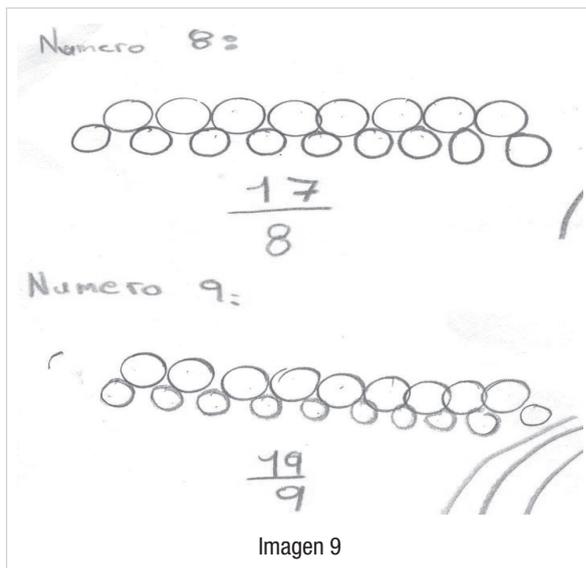


Imagen 9

Para ellos fue necesario el uso de la regla para dibujar las posiciones pedidas conservando la distribución espacial de los círculos de las primeras posiciones.

Los medios semióticos movilizados para abordar la primera parte de la actividad, que en un principio surgieron como signos que les permitieron acercarse a la tarea se convierten en medios semióticos en la medida que en las posteriores sesiones les permitieron objetivar la generalización planteada.

Durante la socialización de la actividad se pudieron observar las elaboraciones que hicieron los niños, en términos de sus construcciones mentales, ya que, explicaban la razón de ser de las acciones que siguieron; como se ve en el siguiente apartado, donde a partir de la argumentación dada por Án se permitió que el grupo se pusiera de acuerdo frente a la necesidad de sumar dos bolitas a la cantidad de la anterior posición, para hallar la cantidad de las posiciones pedidas, como se lee a continuación:

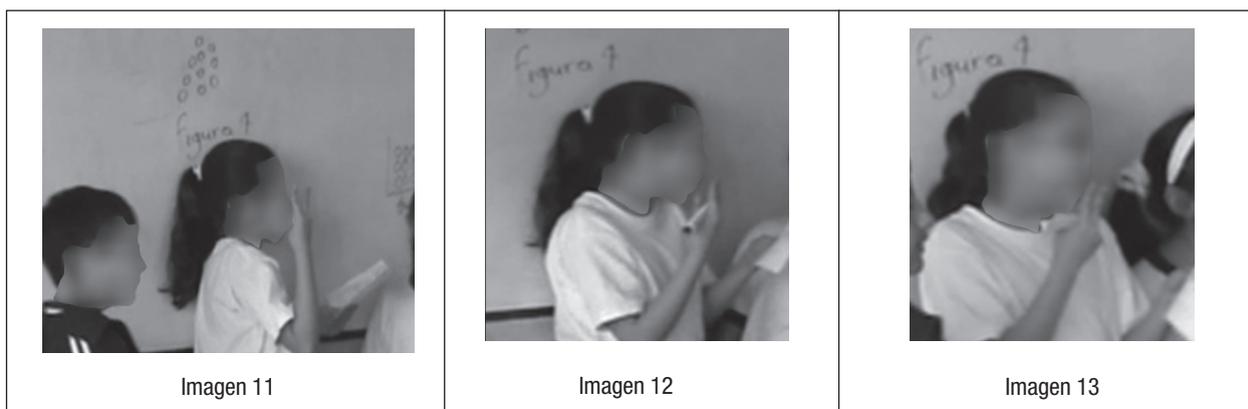
Profe: [dirigiéndose a Ángela] ¿Qué hiciste tú para saber cuál era la figura cuatro?.

Án: ... pues en la figura tres habían [sic] siete bolitas entonces le sumé dos [mostrando con sus dedos esta cantidad].

Profe: ¿Por qué le sumaste dos?

Án: porque...en la primera hay una [mostrando en sus dedos la cantidad] y le sumas dos [mostrando con los dedos] en la siguiente como en la figura una hay tres y le sumas dos me da cinco.

Profe: ok.



Profe: ¿Cuántas bolitas tiene la posición cuatro?.

Lui: [escribe] nueve.

Profe: y en la figura cinco.

Lui: [escribe] 11.

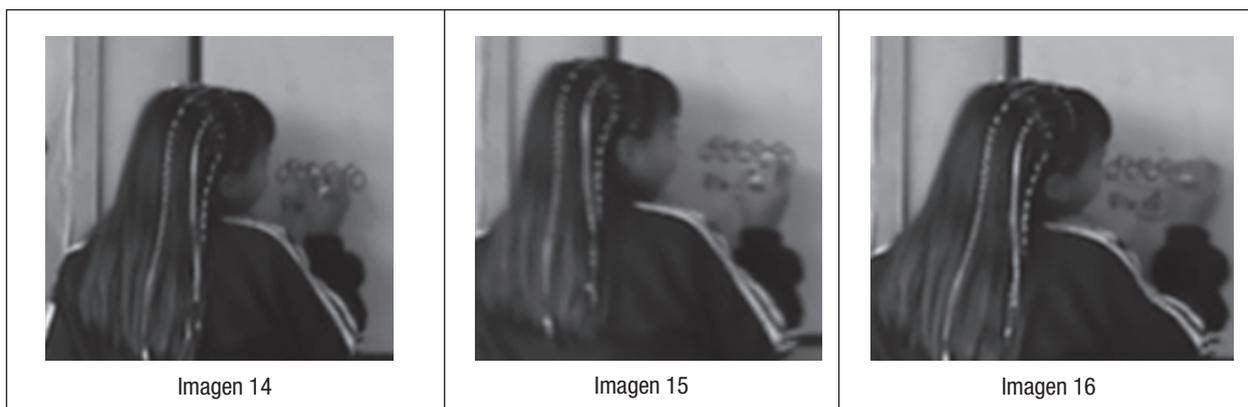
Profe: ¿qué hiciste para saber?

Lui: [señalando con el marcador en el dibujo de la posición cuatro en el

tablero] sumé esto cuatro más [de nuevo señaló las figuras en el tablero] estos cinco y después sumé todo [encerrando en un círculo el total de bolitas].

Profe: y para la posición seis ¿la dibujaron también?

Lui: sí, hicimos lo mismo [señala la fila inferior y la fila superior].



Es importante notar que Án estableció que necesitaba la cantidad de la anterior posición para determinar cualquier posición pedida, es decir, planteó una generalidad que depende de la figura, en este caso del anterior, sino la tiene, le es imposible hallar la cantidad para cualquier

cantidades a las que hacía referencia.

Desarrollo Parte 2

En el grupo 2, el primer medio empleado para hallar la solución fue establecer una tabla que relacionara las posiciones y las cantidades en cada posición, teniendo en cuenta siempre sumar dos al anterior, como se muestra en la imagen 17:

1-21	25-51	40-81	56-111	73-151	92-191
2-23	27-53	42-83	58-113	75-153	94-193
3-25	29-55	44-85	60-115	77-155	96-195
4-27	31-57	46-87	62-117	79-157	98-197
5-29	33-59	48-89	64-119	81-159	100-199
6-31	35-61	50-91	66-121	83-161	102-201
7-33	37-63	52-93	68-123	85-163	104-203
8-35	39-65	54-95	70-125	87-165	106-205
9-37	41-67	56-97	72-127	89-167	108-207
10-39	43-69	58-99	74-129	91-169	110-209
11-41	45-71	60-101	76-131	93-171	112-211
12-43	47-73	62-103	78-133	95-173	114-213
13-45	49-75	64-105	80-135	97-175	116-215
14-47	51-77	66-107	82-137	99-177	118-217
15-49	53-79	68-109	84-139	101-179	120-219
16-51	55-81	70-111	86-141	103-181	122-221
17-53	57-83	72-113	88-143	105-183	124-223
18-55	59-85	74-115	90-145	107-185	126-225
19-57	61-87	76-117	92-147	109-187	128-227
20-59	63-89	78-119	94-149	111-189	130-229
21-61	65-91	80-121	96-151	113-191	132-231
22-63	67-93	82-123	98-153	115-193	134-233
23-65	69-95	84-125	100-155	117-195	136-235
24-67	71-97	86-127	102-157	119-197	138-237
25-69	73-99	88-129	104-159	121-199	140-239
26-71	75-101	90-131	106-161	123-201	142-241
27-73	77-103	92-133	108-163	125-203	144-243
28-75	79-105	94-135	110-165	127-205	146-245
29-77	81-107	96-137	112-167	129-207	148-247
30-79	83-109	98-139	114-169	131-209	150-249
31-81	85-111	100-141	116-171	133-211	152-251
32-83	87-113	102-143	118-173	135-213	154-253
33-85	89-115	104-145	120-175	137-215	156-255
34-87	91-117	106-147	122-177	139-217	158-257
35-89	93-119	108-149	124-179	141-219	160-259
36-91	95-121	110-151	126-181	143-221	162-261
37-93	97-123	112-153	128-183	145-223	164-263
38-95	99-125	114-155	130-185	147-225	166-265
39-97	101-127	116-157	132-187	149-227	168-267
40-99	103-129	118-159	134-189	151-229	170-269
41-101	105-131	120-161	136-191	153-231	172-271
42-103	107-133	122-163	138-193	155-233	174-273
43-105	109-135	124-165	140-195	157-235	176-275
44-107	111-137	126-167	142-197	159-237	178-277
45-109	113-139	128-169	144-199	161-239	180-279
46-111	115-141	130-171	146-201	163-241	182-281
47-113	117-143	132-173	148-203	165-243	184-283
48-115	119-145	134-175	150-205	167-245	186-285
49-117	121-147	136-177	152-207	169-247	188-287
50-119	123-149	138-179	154-209	171-249	190-289
51-121	125-151	140-181	156-211	173-251	192-291
52-123	127-153	142-183	158-213	175-253	194-293
53-125	129-155	144-185	160-215	177-255	196-295
54-127	131-157	146-187	162-217	179-257	198-297
55-129	133-159	148-189	164-219	181-259	200-299
56-131	135-161	150-191	166-221	183-261	202-301
57-133	137-163	152-193	168-223	185-263	204-303
58-135	139-165	154-195	170-225	187-265	206-305
59-137	141-167	156-197	172-227	189-267	208-307
60-139	143-169	158-199	174-229	191-269	210-309
61-141	145-171	160-201	176-231	193-271	212-311
62-143	147-173	162-203	178-233	195-273	214-313
63-145	149-175	164-205	180-235	197-275	216-315
64-147	151-177	166-207	182-237	199-277	218-317
65-149	153-179	168-209	184-239	201-279	220-319
66-151	155-181	170-211	186-241	203-281	222-321
67-153	157-183	172-213	188-243	205-283	224-323
68-155	159-185	174-215	190-245	207-285	226-325
69-157	161-187	176-217	192-247	209-287	228-327
70-159	163-189	178-219	194-249	211-289	230-329
71-161	165-191	180-221	196-251	213-291	232-331
72-163	167-193	182-223	198-253	215-293	234-333
73-165	169-195	184-225	200-255	217-295	236-335
74-167	171-197	186-227	202-257	219-297	238-337
75-169	173-199	188-229	204-259	221-299	240-339
76-171	175-201	190-231	206-261	223-301	242-341
77-173	177-203	192-233	208-263	225-303	244-343
78-175	179-205	194-235	210-265	227-305	246-345
79-177	181-207	196-237	212-267	229-307	248-347
80-179	183-209	198-239	214-269	231-309	250-349
81-181	185-211	200-241	216-271	233-311	252-351
82-183	187-213	202-243	218-273	235-313	254-353
83-185	189-215	204-245	220-275	237-315	256-355
84-187	191-217	206-247	222-277	239-317	258-357
85-189	193-219	208-249	224-279	241-319	260-359
86-191	195-221	210-251	226-281	243-321	262-361
87-193	197-223	212-253	228-283	245-323	264-363
88-195	199-225	214-255	230-285	247-325	266-365
89-197	201-227	216-257	232-287	249-327	268-367
90-199	203-229	218-259	234-289	251-329	270-369
91-201	205-231	220-261	236-291	253-331	272-371
92-203	207-233	222-263	238-293	255-333	274-373
93-205	209-235	224-265	240-295	257-335	276-375
94-207	211-237	226-267	242-297	259-337	278-377
95-209	213-239	228-269	244-299	261-339	280-379
96-211	215-241	230-271	246-301	263-341	282-381
97-213	217-243	232-273	248-303	265-343	284-383
98-215	219-245	234-275	250-305	267-345	286-385
99-217	221-247	236-277	252-307	269-347	288-387
100-219	223-249	238-279	254-309	271-349	290-389
101-221	225-251	240-281	256-311	273-351	292-391
102-223	227-253	242-283	258-313	275-353	294-393
103-225	229-255	244-285	260-315	277-355	296-395
104-227	231-257	246-287	262-317	279-357	298-397
105-229	233-259	248-289	264-319	281-359	300-399
106-231	235-261	250-291	266-321	283-361	302-401
107-233	237-263	252-293	268-323	285-363	304-403
108-235	239-265	254-295	270-325	287-365	306-405
109-237	241-267	256-297	272-327	289-367	308-407
110-239	243-269	258-299	274-329	291-369	310-409
111-241	245-271	260-301	276-331	293-371	312-411
112-243	247-273	262-303	278-333	295-373	314-413
113-245	249-275	264-305	280-335	297-375	316-415
114-247	251-277	266-307	282-337	299-377	318-417
115-249	253-279	268-309	284-339	301-379	320-419
116-251	255-281	270-311	286-341	303-381	322-421
117-253	257-283	272-313	288-343	305-383	324-423
118-255	259-285	274-315	290-345	307-385	326-425
119-257	261-287	276-317	292-347	309-387	328-427
120-259	263-289	278-319	294-349	311-389	330-429
121-261	265-291	280-321	296-351	313-391	332-431
122-263	267-293	282-323	298-353	315-393	334-433
123-265	269-295	284-325	300-355	317-395	336-435
124-267	271-297	286-327	302-357	319-397	338-437
125-269	273-299	288-329	304-359	321-399	340-439
126-271	275-301	290-331	306-361	323-401	342-441
127-273	277-303	292-333	308-363	325-403	344-443
128-275	279-305	294-335	310-365	327-405	346-445
129-277	281-307	296-337	312-367	329-407	348-447
130-279	283-309	298-339	314-369	331-409	350-449
131-281	285-311	300-341	316-371	333-411	352-451
132-283	287-313	302-343	318-373	335-413	354-453
133-285	289-315	304-345	320-375	337-415	356-455
134-287	291-317	306-347	322-377	339-417	358-457
135-289	293-319	308-349	324-379	341-419	360-459
136-291	295-321	310-351	326-381	343-421	362-461
137-293	297-323	312-353	328-383	345-423	364-463
138-295	299-325	314-355	330-385	347-425	366-465
139-297	301-327	316-357	332-387	349-427	368-467
140-299	303-329	318-359	334-389	351-429	370-469
141-301	305-331	320-361	336-391	353-431	372-471
142-303	307-333	322-363	338-393	355-433	374-473
143-305	309-335	324-365	340-395	357-435	376-475
144-307	311-337	326-367	342-397	359-437	378-477
145-309	313-339	328-369	344-399	361-439	380-479
146-311	315-341	330-371	346-401	363-441	382-481
147-313	317-343	332-373	348-403	365-443	384-483
148-315	319-345	334-375	350-405	367-445	386-485
149-317	321-347	336-377	352-407	369-447	388-487
150-319	323-349	338-379	354-409	371-449	390-489
151-321	325-351	340-381	356-411	373-451	392-491
152-323	327-353	342-383	358-413	375-453	394-493
153-325	329-355	344-385	360-415	377-455	396-495
154-327	331-357	346-387	362-417	379-457	398-497
155-329	333-359	348-389	364-419	381-459	400-499
156-331	335-361	350-391	366-421	383-461	402-501
157-333	337-363	352-393	368-423	385-463	404-503
158-335	339-365	354-395	370-425	387-465	406-505
159-337	341-367	356-397	372-427	389-467	408-507
160-339	343-369	358-399	374-429	391-469	410-509

1 suma 25 + 26 y medio 1035 2 y medio 51

$$\begin{array}{r} 51 \\ -25 \\ \hline \end{array}$$

suma 50 + 51 use y medio 101

$$\begin{array}{r} 101 \\ -50 \\ \hline \end{array}$$

suma 100 + 101 use y medio 201

$$\begin{array}{r} 201 \\ -100 \\ \hline \end{array}$$

Siguiendo el procedimiento descrito pudieron hallar la cantidad de bolitas para cualquier posición. Para ellos fue importante ver que la configuración de la secuencia se hacía siempre la cantidad de círculos de la posición, que iba en la fila superior de la construcción y esa misma cantidad más uno que iba en la fila inferior, de este modo pudieron establecer la cantidad para cualquier posición.

Para el grupo 1, Felipe insistía que debían ser el doble la cantidad de bolitas para cada posición, pero en diálogo con la profesora determinó que era el doble más uno, como se muestra en el siguiente fragmento:

- Profe: Felipe ¿cuántos hay en la 10?
- Fel: 20.
- Profe: ¿Por qué veinte?
- Fel: [no respondió y empezó a dar golpes sobre la mesa].
- Profe: en la cuatro hay nueve, en la cinco hay 11, en la seis 12, en la siete 15, en la ocho 17, cuántas hay entonces en la 20.
- Fel: pues 20... [Pensando un rato] a no 21.
- Profe: entonces ¿cuántas hay en la veintiuno?
- Fel: [no respondió].

Es de notar que la intervención de la profesora le permitió observar el comportamiento en las cantidades, pero que a pesar de hacer esta observación no pudo establecer con claridad una nueva forma que le permitiere hallar el total de bolas para determinada posición.

En la socialización de las respuestas de cada uno de los grupos a la segunda parte de la actividad, la profesora construyó una tabla donde relacionaba cada uno de los grupos con sus respuestas para las posiciones 25, 50 y 100.

Profe: ¿Cuántos hay en la posición 25?

Nat: 26.

Profe: en la 50.

Nat: 101.

Profe: en la 100.

Nat: 201.

Profe: ¿cómo hicieron para saberlo?

Nat: nosotros sumamos dos..... dos veces cincuenta y más uno.

Profe: listo, y en la 100.

Nat: heeee.

Profe: hicieron lo mismo.

Nat: sí [moviendo su cabeza afirmando lo que decía].

De la misma manera se preguntó a cada grupo las cantidades en cada posición, en el grupo dos, establecieron lo siguiente:

Profe: ¿Cómo hicieron para encontrar estas cantidades?

ÁN: nosotros hicimos esto, mostrando la tabla desde la posición 10.

En el grupo tres:

Profe: ¿Cómo hicieron para encontrar la respuesta?





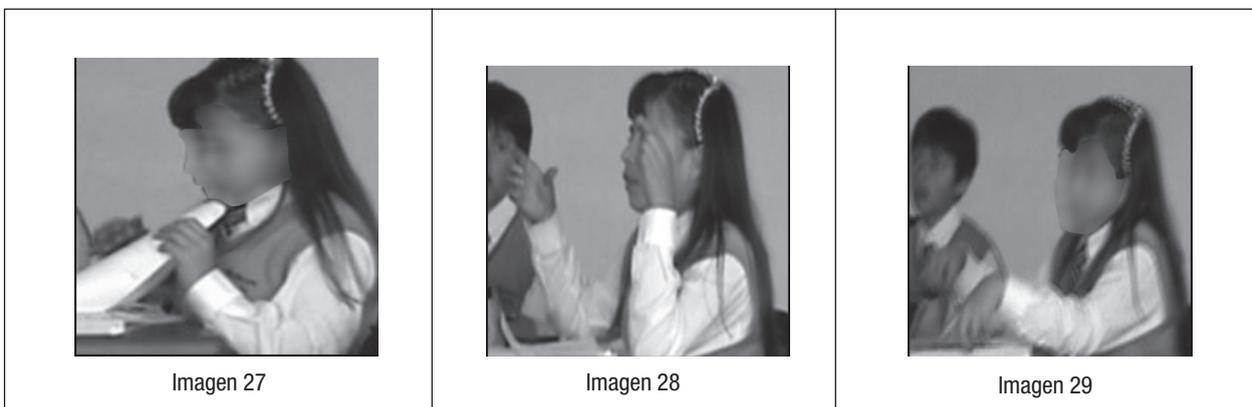
Lui: pues nosotros hicimos 25 más 26 y eso da 51 y nosotros dijimos que es 51 de 25.

Profe: en la 50 ¿Cómo hicieron?

Lui: lo mismo, sumamos 50 más 51 y en la 100 sumamos 100 más 101.

Profe: ¿Cómo sabían que era sumar eso así?

Lui: porque en la primera parte que era ésta [mostrando el dibujo de la parte 1 de la actividad], en la figura tres habían [sic] tres arriba y cuatro abajo, entonces en la 25 son 25 arriba y 26 abajo [mostrando con sus manos arriba y abajo a la medida que hablaba].



Discusión

El desarrollo de este trabajo permitió analizar, entre otros aspectos, que existen diversas formas de evidenciar en un estudiante sus procesos de

objetivación, (como son los movimientos, las miradas, los gestos, las palabras, los escritos, etc.) y que muchas veces los docentes privilegian algunos de ellos (esto en relación a la enseñanza



y aprendizaje del álgebra, en donde varios autores han señalado que se da prioridad al lenguaje simbólico (Grupo Azarquiél 1993; Espinosa 2002; Mason et al., 1989; Socas et al., 1989; Kieran 1994) y no se le da la importancia merecida a los que pueden desarrollar los estudiantes, ya que estos pueden brindar información en torno a sus procesos de objetivación.

Fue posible mostrar que el primer medio semiótico empleado por los estudiantes fue el gestual, ya que la primera reacción frente a la tarea propuesta, fue de no entendimiento, en donde mostraban con movimientos corporales, tomándose la cabeza, o mirando hacia los lados, sugiriendo que no tenían claridad frente a lo que se les planteaba. En la medida que se reunieron en grupos surgió el empleo de otros medios semióticos, ya que tuvieron la oportunidad de interactuar con sus compañeros frente a lo que habían comprendido de la tarea y aclarar en conjunto las dudas que tenían.

De esta manera abordaron la tarea, y es de resaltar que cada uno de los grupos generó una forma distinta de establecer el patrón observado, por ejemplo, para el primer grupo, la generalidad se observó en relación a las características de los números, ya que siempre se obtenían cantidades impares, para ellos era necesario establecer una lista de números impares desde la primera posición, para hallar la cantidad en cualquier posición pedida; para el grupo dos, las cantidades en cada posición dependían de la anterior posición, ya que siempre se sumaba dos al anterior, este grupo siempre se esforzó por mostrar a sus compañeros lo que habían observado y lo expresaban de manera gestual utilizando sus dedos y reforzándolo con sus palabras, para ellos era no fue posible, hallar una cantidad de determinada posición si no contaba con la cantidad de alguna de las anteriores posiciones cercanas.

En el grupo tres, se estableció una generalidad más elaborada, en términos del menor uso de medios semióticos perceptivos, ya que a partir de la disposición geométrica de las figuras, que corresponde a una visualización más estructural, fue posible establecer, que siempre era sumar la fila superior en inferior, la fila superior correspondía a la posición y la inferior a uno más que ésta, así hallaron la cantidad para las posiciones pedidas, pero no pudieron desprenderse del superior e inferior, lo que posiblemente, limitó que establecieran una generalidad de tipo simbólico, aunque es de aclarar que este no era el interés del trabajo.

De este modo se evidenció que cada uno de los grupos estableció una manera de generalizar, y que el hecho de ir socializando sus hallazgos y escuchando los de los compañeros les permitió dar claridad a lo que hacían y a la vez de cuestionar si las producciones de sus compañeros eran correctas, constituyendo una interacción, al interior del curso, que les permitió progresar en los procesos de significación que fueron elaborando en relación a la generalización que establecieron.

En trabajos realizados por Radford (2008) con niños de las mismas edades ha sido posible identificar que el pensamiento algebraico no aparece en la ontogenia o por casualidad, ni tampoco aparece como una consecuencia necesaria de la maduración cognitiva, sino que el pensamiento algebraico aparece bajo algunas condiciones pedagógicas que deben ser creadas (Radford, 2010). Como fue el caso de este trabajo, en donde los niños desarrollaron pensamiento algebraico, a pesar de no estar operando con letras o despejando ecuaciones.

En particular Radford (2010) se refiere a introducir actividades que desarrollen pensamiento algebraico desde la básica primaria, ya que se ha evidenciado que formas de



pensamiento algebraico pueden aparecer entre los 7 y 8 años de edad, como lo pudimos evidenciar en este estudio.

Conclusiones

Los medios semióticos de objetivación empleados por los niños, en este trabajo, correspondieron con los identificados por Radford (2010); gestos, palabras y símbolos escritos. La movilización de éstos les permitió abordar la situación propuesta y luego plantear una solución. Es de resaltar que a pesar de que emplearon los mismos medios, para cada niño fue particular la forma de expresarlos, mientras que para una niña siempre fue necesario mostrar con sus manos el arriba y el abajo de la figura, para otra era necesario mostrar con sus dedos que las cantidades en los números aumentaban de a dos de una posición a otra, por citar unos ejemplos.

Los estratos de generalidad considerados por Radford (2010), son tres: factual, contextual y simbólico, como se explicaron anteriormente, en el desarrollo de este trabajo se evidenció que los grupos se encontraron en el estrato factual, ya que las generalizaciones que plantearon dependían directamente de las cantidades obtenidas en las posiciones anteriores y tan solo un grupo estableció un estrato de generalidad contextual, debido a que pudieron establecer una relación entre la cantidad superior e inferior de la figura. Aunque los dos son estratos de generalización, una es más elaborada que la otra en términos de procesos de significación y la consideración de elementos perceptivos y estructurales del patrón.

Durante el desarrollo del trabajo fue posible evidenciar una relación entre los estratos de generalidad propuestos por Radford (2008) y los niveles de generalidad propuestos por Mason et al. (1989); Pues mientras que el primero se refiere a generalidad factual y contextual, Mason

habla de ver y decir, es posible relacionarlos, ya que ambos hacen referencia al momento en que se percibe la generalidad, solo que para Radford puede ser expresada de diversas maneras, como gestos, movimientos, o palabras y para Mason es percibir la generalidad pero hacerla evidente utilizando algunas formas de expresión, en las que no se incluyen los gestos o movimientos.

Referencias bibliográficas y cibergráficas

- Butto, C. y Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación Matemática*, 22 (3), 55-86.
- Bravin, C. y Pievin, N. (2008). Documento metodológico orientador para la investigación educativa. Organización de estados americanos y para la educación la ciencia y la cultura. <http://www.me.gov.ar/infod/documentos/documentometodologico.pdf>
- Espinosa, M. (2002). *Aplicación de un instrumento de evaluación de álgebra elemental*. Replica del trabajo del Dr. Fernández García. (Tesis doctoral no publicada). Granada. España. Universidad de Granada.
- Fernández, (1997). *Evaluación de competencias de álgebra elemental basada en la resolución de problemas verbales*. (Tesis doctoral no publicada). Granada. España. Universidad de Granada.
- Grupo Azarquiel. (1993). Ideas y actividades para enseñar álgebra. *Síntesis* N ° 33. España.
- Grupo Pretexto (1999) *Transición aritmética álgebra*. 2 Ed., Bogotá. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Kieran, C. (1994). *El aprendizaje y la enseñanza del álgebra escolar*. Traducción de Vilma Mesa. Una empresa Docente. www.ued.uniandes.edu.co
- Lasprilla, A. (2012). Medios semióticos de objetivación que emergen en estudiantes de tercero de básica primaria en torno a una tarea de generalización de patrones figurales. (Trabajo de Especialización, no publicado). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Mason J, Graham A, Pimm D, Gowar N, (1989). *Rutas hacia/Raíces del álgebra*. Bogotá, Colombia: sección publicaciones UPTC.



- Miranda, I., Radford, L. y Guzmán, J. (2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Educación Matemática*, 19(3), 5-30. http://www.laurentian.ca/Laurentian/Home/Departments/School+of+Education+French/Faculty+and+Staff/Luis+Radford/luis_radford_index.htm?Laurentian_Lang=en-CA
- Radford, L (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.
- Radford, L (2006) Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Relime*, Número especial. 103 -129.
- Radford, L. (2008). Iconicity and Contraction: A Semiotic Investigation of Forms of Algebraic Generalizations of Patterns In Different Contexts. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*. DOI 10.1007/s11858-007-0061-0
- Radford, L. (2010). Elementary Forms of Algebraic Thinking in Young Students. In M. F. Pinto. & T. F. Kawasaki (Eds.). *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4 (1), 73-80.
- Vergel, R. (2010) La Perspectiva de Cambio Curricular Early-Algebra como Posibilidad para desarrollar el Pensamiento Algebraico en Escolares de Educación Primaria: Una Mirada al Proceso Matemático de Generalización. *Memoria 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, 69- 81.
- Socas, M. Camacho, M; Palarea y Hernández. (1989). Iniciación al álgebra. Colección matemáticas: cultura y aprendizaje: Madrid, *Síntesis* N ° 23.

THE AUTHORS

Adriana Lasprilla Herrera, licenciada en educación básica con énfasis en matemáticas, de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, con Especialización en Educación Matemática en la misma Universidad, su interés es desarrollar investigaciones dentro de la teoría de la objetivación cultural.

Francisco Javier Camelo Bustos Investigador en educación matemática con proyectos financiados por Colciencias, IDEP y las Universidades Distrital y Pedagógica Nacional. El tema principal de investigación es Educación Matemática Crítica y Trabajo colaborativo como estrategia para la formación continuada de profesores de matemáticas.

